

Примеры выполнения и оформления контрольных работ

№ 1

Фабрика выпускает мороженое трех видов А, В и С. При производстве мороженого используются компоненты: молоко, сахар, шоколад с максимальными суточными запасами на складе соответственно 5 т, 4 т и 0,6 т. Потребности в продукции для производства каждого вида мороженого приведены в Таблице 1.1.

Таблица 1.1

Исходные данные

Наименование продукта	Тип мороженого		
	А	В	С
Молоко (т)	0,8	0,9	0,7
Сахар (т)	0,5	0,6	0,6
Шоколад (т)	0,1	-	0,3

На рынке сбыта, как показывает его изучение, суточный спрос на мороженое достигает:

- на мороженое А – 2 т;
- на мороженое В – 3 т;
- на мороженое С – 1 т

Оптовая цена мороженого А составляет 3 000 р./т, мороженого В – 2 000 р./т, а мороженого С – 4 000 р./т.

Необходимо найти оптимальный план объема суточного производства мороженого каждого вида, обеспечивающий максимальную выручку от реализации продукции.

Решение

Математическая модель

Задача заключается в планировании оптимальных объемов суточного производства каждого вида мороженого, обеспечивающих максимальную выручку от реализации продукции.

Экономико-математическая модель строится с искомыми переменными – суточным производством мороженого А – X_a , мороженого В – X_b , и мороженого С – X_c . Они определяют целевую функцию (ЦФ) – выручку от реализации продукции:

$$(1.1.) \quad F(x) = 3000 * X_a + 2000 * X_b + 4000 * X_c \rightarrow \max$$

Решению задачи отвечает максимум ЦФ при следующих условиях и ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,8 X_a + 0,9 X_b + 0,7 X_c \leq 5 \\ 0,5 X_a + 0,6 X_b + 0,6 X_c \leq 4 \\ 0,1 X_a + 0,3 X_c \leq 0,6 \\ X_a \leq 2 \\ X_b \leq 3 \\ X_c \leq 1 \\ X_a \geq 0 \\ X_b \geq 0 \\ X_c \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{– суточный расход компонентов не должен пре-} \\ \text{вышать их суточных запасов} \\ \text{– с учетом рыночного спроса, спрос не должен быть превышен, т.к.} \\ \text{продукция скоропортящаяся и затоваривание не допустимо.} \\ \text{–объемы производства не могут быть отрицательными.} \end{array}$$

Будем искать решение этой задачи путем оптимизационного компьютерного моделирования в среде электронных таблиц MS Excel с помощью процедуры поиска решения.

Построение модели

1. Для создания экономико-математической модели в Excel на рабочий лист введем исходные данные (рис 1.1).

	А	В	С	Д	Е
1	Наименование продукта	Тип мороженого			Запас продукта на складе
2		А	В	С	
3	Молоко	0,8	0,9	0,7	5
4	Сахар	0,5	0,6	0,6	4
5	Шоколад	0,1		0,3	0,6
6					
7	Объем производства мороженого	Xa	Xb	Xc	
8	Объем производства мороженого (значение)				
9	Оптовая цена мороженого	3000	2000	4000	
10	Спрос на мороженое	2	3	1	

Рис 1.1. Исходные данные

- В ячейках B7:D7 – имена переменных.
- Ячейки B8:D8 – предназначены для значений переменных (это изменяемые в процессе поиска решения ячейки).
- Значения ячеек, в которых размещена оптовая цена мороженого, являются коэффициентами ЦФ (формула 1.1).
- Для оптимизации экономико-математической модели определим ячейки целевой функции и ограничений (рис. 1.2).

	А	В	С	Д	Е
1	Наименование продукта	Тип мороженого			Запас продукта на складе
2		А	В	С	
3	Молоко	В	0,9	0,7	5
4	Сахар	0,5	0,6	0,6	4
5	Шоколад	0,1		0,3	0,6
6					
7	Объем производства мороженого	Xa	Xb	Xc	
8	Объем производства мороженого (значение)				
9	Оптовая цена мороженого (к-ты ЦФ)	3000	2000	4000	
10	Спрос на мороженое	2	3	1	
11					
12	ЦФ(выручка) - max				→
13					
14	Ограничения				
15	Продукты				
16	Молоко		не более		
17	Сахар		не более		
18	Шоколад		не более		
19	Спрос				
20	А		не более		
21	В		не более		
22	С		не более		

Рис. 1.2. Фрагмент листа Excel для ввода ЦФ и ограничений.

Е12 – целевая ячейка, в которой будет размещена формула целевой функции.

6. Таблица ограничений разделена на две: по продуктам – диапазон ячеек А16:Е18 и по спросу – диапазон ячеек А20:Е22.

Ввод формул

7. Для нахождения ЦФ используем функцию Excel СУММПРОИЗВ из категории математических.: =СУММПРОИЗВ(В9:Д9;В8:Д8) (рис. 1.3). Значение введенной ЦФ равно нулю, т.к. значения объема производства тоже пока нулевые.

	A	B	C	D	E
1	Наименование продукта	Тип мороженого			Запас продукта на складе
2		A	B	C	
3	Молоко	0,8	0,9	0,7	5
4	Сахар	0,5	0,6	0,6	4
5	Шоколад	0,1		0,3	0,6
6					
7	Объем производства мороженого	Xa	Xb	Xc	
8	Объем производства мороженого (значение)				
9	Оптовая цена мороженого (к-ты ЦФ)	3000	2000	4000	
10	Спрос на мороженое	2	3	1	
11					
12	ЦФ(выручка) - max				=СУММПРОИЗВ(B9:D9;B8:D8)

Рис 1.3. Фрагмент листа Excel в режиме формул. ЦФ и влияющие ячейки.

8. Заполним формулами таблицу ограничений согласно математической модели – ограничения по продуктам и ограничения по спросу. (рис.1.4 и рис. 1.5):

14	Ограничения			
15	Продукты			
16	Молоко	0	не более	5
17	Сахар	0	не более	4
18	Шоколад	0	не более	0,6
19	Спрос			
20	A	0	не более	2
21	B	0	не более	3
22	C	0	не более	1

Рис.1.4. Результаты ввода ограничений

14	Ограничения			
15	Продукты			
16	=A3	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;\$B\$8:\$D\$8)	не более	=E3
17	=A4	=СУММПРОИЗВ(B4:D4;\$B\$8:\$D\$8)	не более	=E4
18	=A5	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;\$B\$8:\$D\$8)	не более	=E5
19	Спрос			
20	=B2	=B8	не более	=B10
21	=C2	=C8	не более	=C10
22	=D2	=D8	не более	=D10

Рис.1.5. Результаты ввода ограничений (режим формул)

Исследование модели

Оптимизация рассматриваемой модели, т.е. поиск неизвестных, при которых достигается максимум целевой функции и удовлетворяются все введенные условия, выполняется встроенной процедурой автоматического поиска решения.

1. Из меню СЕРВИС командой ПОИСК РЕШЕНИЯ вызовем одноименное диалоговое окно, произведем его настройку и добавим ограничения (рис.1.6):

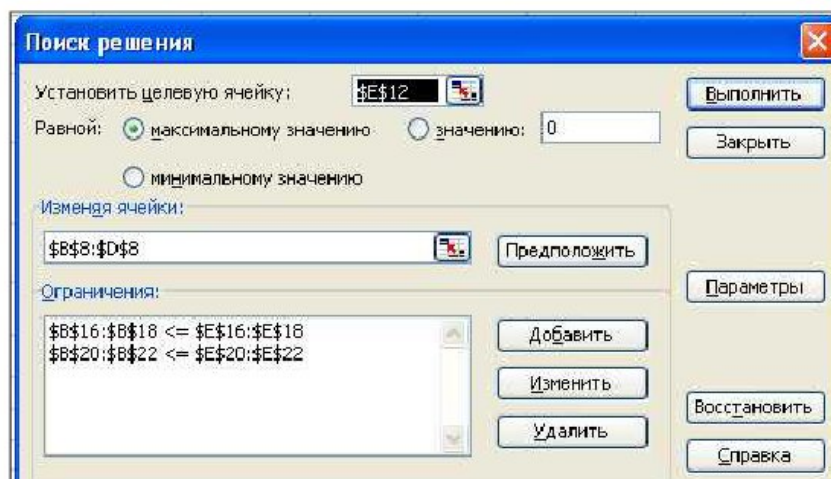


Рис.1.6. Настройка диалогового окна ПОИСК РЕШЕНИЯ

2. Кнопкой ПАРАМЕТРЫ вызовем окно ПАРАМЕТРЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ, где установим флажок ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ и добавим последнее из ограничений, учитывающее условие неотрицательности объемов производства, - флажок НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ (рис. 1.7).

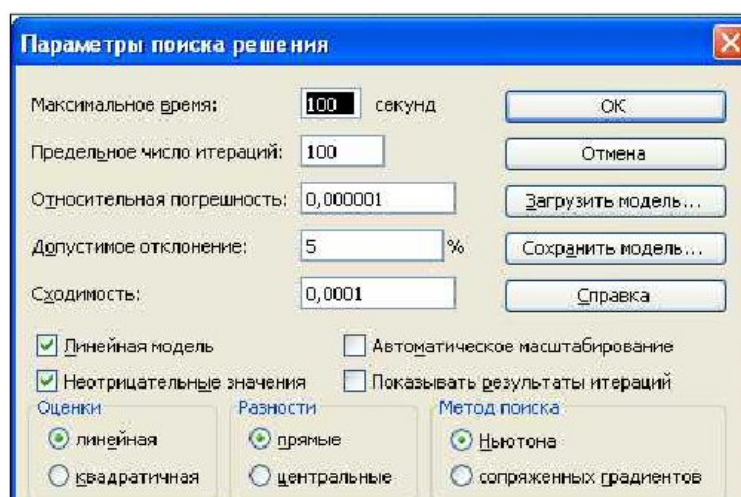


Рис. 1.7. Настройка Параметров поиска решения

3. Завершим процедуру поиска решения ОК. Выполнение процедуры завершается выводом сообщения о завершении поиска и найденном решении (рис. 1.8).

4. Выберем все виды отчетов.

	A	B	C	D	E
1	Результаты поиска решения				
2	Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.				
3					Тип отчета
4					Результаты
5	☒ Сохранить найденное решение				Устойчивость
6	☐ Восстановить исходные значения				Пределы
7	ОК Отмена Сохранить сценарий... Справка				
8	Объем производства мороженого (значение)	2	3	1	
9	Оптовая цена мороженого (к-ты ЦФ)	3000	2000	4000	
10	Спрос на мороженое	2	3	1	
11					
12	ЦФ(выручка) - max				16 000,00р.
13					
14	Ограничения				
15	Продукты				
16	Молоко	5	не более	5	
17	Сахар	3,4	не более	4	
18	Шоколад	0,5	не более	0,6	
19	Спрос				
20	A	2	не более	2	
21	B	3	не более	3	
22	C	1	не более	1	

Рис 1.8. Фрагмент рабочего листа с окном результата поиска решения

5. Таким образом, максимальная выручка составит 16 000,00 р. Спрос на мороженое полностью удовлетворен. На складе в остатке сахар – 0,6 т и шоколад – 0,1 т.
6. Фрагмент отчета по результатам – на рис. 1.9.

A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам					
2	Рабочий лист: [мороженое.xls]Решение					
3	Отчет создан: 16.03.2006 11:12:25					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
8	\$E\$12	ЦФ(выручка) - max	Запас продукта на складе	- р.	16 000,00р.	
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
13	\$B\$8	Объем производства мороженого (значение) Xa	0	2		
14	\$C\$8	Объем производства мороженого (значение) Xb	0	3		
15	\$D\$8	Объем производства мороженого (значение) Xc	0	1		
16						
17						
18	Ограничения					
19	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
20	\$B\$16	Молоко Xa	5	\$B\$16<=\$E\$16	связанное	0
21	\$B\$17	Сахар Xa	3,4	\$B\$17<=\$E\$17	не связан	0,6
22	\$B\$18	Шоколад Xa	0,5	\$B\$18<=\$E\$18	не связан	0,1
23	\$B\$20	A Xa	2	\$B\$20<=\$E\$20	связанное	0
24	\$B\$21	B Xa	3	\$B\$21<=\$E\$21	связанное	0
25	\$B\$22	C Xa	1	\$B\$22<=\$E\$22	связанное	0

Рис. 1.9. Фрагмент рабочего листа с отчетом по результатам

Маршрут движения коммивояжера

Коммивояжеру необходимо посетить три города по одному разу и вернуться в исходный город. Каков должен быть маршрут поездки, чтобы затраты на дорогу были минимальны? Данные о тарифах на проезд представлены в виде матрицы чисел (таблица 2.1).

Таблица 2.1

Тарифы на проезд

Город	Тарифы		
	Москва	Минск	Киев
Москва		27	100
Минск	50		80
Киев	200	130	

Решение:

Математическая модель задачи.

Определим булевы переменные задачи: $x_{ij} = 1$, если коммивояжер переезжает из города i в город j , и $x_{ij} = 0$, если коммивояжер не переезжает из города i в город j .

Тогда задача заключается в определении минимума целевой функции

$$L(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

при ограничениях:

$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}$	– только один въезд в город j ,
$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$	– только один выезд из города i .

В задаче коммивояжера необходимо еще одно условие, а именно:

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2, i \neq j, i, j = 2, \dots, n.$$

Это специальное условие обеспечивает устранение нескольких несвязанных между собой маршрутов и циклов, попросту означающих перемещение коммивояжера по замкнутому частичному маршруту.

Вид электронной таблицы для решения задачи.

1. В ячейки B11:D13 вводим матрицу тарифов.
2. Вводим формулы

Ячейка	Формула	Примечание
B7	=СУММ(B4:B6)	Копируем в диапазон B7:D7
E4	=СУММ(B4:D4)	Копируем в диапазон E4:E6
B15	=СУММПРОИЗВ(B4:D6;B11:	Целевая функция

	D13)	
D15	=B4+C5+D6	Исключение пути $i \rightarrow i$
B19	=C\$8-C8+2*C5	Копируем в диапазон B19:C19
B20	=D\$8-C8+2*C6	Копируем в диапазон B20:C20

3. Исходные данные приведены на рис.2.1.

	A	B	C	D	E	F
1	Задача коммивояжера					
2	Матрица переменных				ограничения	
3		Москва	Минск	Киев		
4	Москва				0	
5	Минск				0	
6	Киев				0	
7	ограничения	0	0	0		
8	переменные					
9	Матрица тарифов					
10		Москва	Минск	Киев		
11	Москва	10000	27	100		
12	Минск	50	10000	80		
13	Киев	200	130	10000		
14						
15	Целевая функция	0		0	исключение пути	
16						
17	Дополнительные ограничения					
18		Минск	Киев			
19	Минск	0	0			
20	Киев	0	0			
21						
22						

Рис. 2.1. Исходные данные задачи

4. Сценарий решения:

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

-
-
-
-
-

Рис.2.2. Окно Поиск решения

Параметры поиска решения

Максимальное время: 100 секунд OK

Предельное число итераций: 100 Отмена

Относительная погрешность: 0,0001 Загрузить модель...

Допустимое отклонение: 1 % Сохранить модель...

Сходимость: 0,001 Справка

☒ Линейная модель ☒ Автоматическое масштабирование

☒ Неотрицательные значения ☐ Показывать результаты итераций

Оценки: ☒ линейная ☐ квадратичная

Разности: ☒ прямые ☐ центральные

Метод поиска: ☒ Ньютона ☐ сопряженных градиентов

Рис. 2.3. Параметры Поиска решения

5. Он приводит к следующим результатам:

Microsoft Excel - Задача коммивояжер1.xlsx							
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка							
И9 fx							
	A	B	C	D	E	F	
1	Задача коммивояжера						
2	<i>Матрица переменных</i>				ограничения		
3		Москва	Минск	Киев			
4	Москва	0	0	1	1		
5	Минск	1	0	0	1		
6	Киев	0	1	0	1		
7	ограничения	1	1	1			
8	переменные		1	0			
9	<i>Матрица тарифов</i>						
10		Москва	Минск	Киев			
11	Москва	10000	27	100			
12	Минск	50	10000	80			
13	Киев	200	130	10000			
14							
15	<i>Целевая функция</i>	280			0	исключение пути	
16							
17	<i>Дополнительные ограничения</i>						
18		Минск	Киев				
19	Минск	0	1				
20	Киев	1	0				
21							

Рис. 2.4. Результаты решения задачи коммивояжера

Ответ: маршрут 1→3→2→1. Стоимость проезда 280.